Διάλεξη 14η

26/11/2018

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Γρ. Διαφ. Εξισ. με σταθερούς συντελεστές:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b \quad , a_i \in \mathbb{R} \; , a_n \neq 0 \quad . \; b \in C(I)$$

→ Έχω για παράδειγμα $y'' + by' + cy = 0$. Βάζω όπου $y = e^{\lambda x}$ και προκύπτει: $\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = 0$

$$\Rightarrow \lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

(i) Αν $\Delta > 0$: τότε έχω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 \neq \lambda_2$

(ii) Αν $\Delta = 0$: τότε $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

(iii) $\Delta < 0$: τότε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

(i) Για $\Delta > 0$:

$\lambda_1 \neq \lambda_2$: $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$

παίρνοντας ορίζουσα ως: $W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} =$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0 \; , x \in \mathbb{R}$$

(ii) Για $\Delta = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. → προκύπτει μια λύση η οποία δεν μου αρκεί, διότι θέλω 2 λύσεις για να έχω βασικό σύνολο. Σκέφτομαι λοιπόν να ανεβάσω τάξη για να βρω την "κρυμμένη" λύση

έχω $b^2 - 4c$ θέτω $y = u e^{\lambda x}$

έτσι προκύπτει:

$$u'' e^{\lambda x} + 2u'\lambda e^{\lambda x} + u\lambda^2 e^{\lambda x} + b(u' e^{\lambda x} + u\lambda e^{\lambda x}) + c e^{\lambda x} u = 0 \Rightarrow$$

$$u'' + 2u'\lambda + \underbrace{\cancel{bu'} + u\lambda^2 + b\lambda u + cu}_{u(\lambda^2 + b\lambda + c) = 0} = 0 \Rightarrow u'' + \underbrace{(2\lambda + b)}_{=0} u' = 0$$

$\Rightarrow u'' = 0 \rightsquigarrow$ άρα $u = c_1 + c_2 x$ έτσι $y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$

παίρνω όπου $c_1 = 0$ και $c_2 = 1$ (διότι είναι σταθερές) και προκύπτουν οι εξής απλές λύσεις: $y_1(x) = x e^{\lambda x}$ ∧ $y_2(x) = e^{\lambda x}$.

2

Για να επιβεβαιώσω ότι το $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$ είναι όντως βασικό σύνολο, χρησιμοποιώ τον ορισμό (ή την Ορ. ωρον.) και προκύπτει: $c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = 0$

$$\begin{cases} x=0 \rightsquigarrow c_1 = 0 \\ x=1 \rightsquigarrow c_2 e^{x} = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

άρα όντως οι λύσεις αποτελούν $\underline{\underline{\text{B.6.Λ.}}}$

(*) Όταν $\Delta = 0$ και $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ τότε ένα B.6.Λ είναι πάντα το $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$

(iii) Αν $\Delta < 0$: $\lambda_1, \lambda_2 = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}$.

$$e^{\lambda_{1,2} x} = \underbrace{e^{-b/2\, x \pm i\sqrt{|\Delta|}\, x}}_{e^{-b/2\, x}\left(\cos(\sqrt{|\Delta|}\, x) + i\sin(\sqrt{|\Delta|}\, x)\right)}$$

Έτσι προκύπτει ότι $y_1(x) = e^{-b/2\, x} \cos(\sqrt{|\Delta|}\, x) = e^{-\sigma x} \cos\tau x$

$y_2(x) = e^{-b/2\, x} \sin(\sqrt{|\Delta|}\, x) = e^{-\sigma x} \sin\tau x$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-\sigma x}\cos\tau x & e^{-\sigma x}\sin\tau x \\ -\sigma e^{-\sigma x}\cos(\tau x) + e^{-\sigma x}\tau\sin(\tau x) & -e^{-\sigma x}\sigma\sin(\tau x) - e^{-\sigma x}\tau\cos(\tau x) \end{vmatrix} \overset{(\text{πράξεις})}{= \dots} \neq 0$$

(*) Όταν $\Delta < 0$ $(\lambda_{1,2} = \sigma \pm i\tau)$ τότε ένα B.6.Λ είναι το $\{e^{\sigma x}\cos(\tau x), e^{\sigma x}\sin(\tau x)\}$

(*) Αν έχω μια εξίσωση της μορφής :

$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$, το πρώτο πράγμα που κάνω είναι η παρακάτω διαδικασία για να βρω ένα Β.σ.Τ. Έστω ότι από προκύπτει:

$$e^{\lambda x} : \boxed{\lambda^n e^{\lambda x} a_n + \dots + \lambda e^{\lambda x} a_1 + e^{\lambda x} a_0 = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0}$$

και έτσι από μια διαφ. εξίσωση προκύπτει ένα χαρακτ. πολυώνυμο $P(x)$.

Αν $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$, $\forall i,j = 1,\dots n$

τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι ένα Β.σ.λ είναι το

$$\{e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$$

~o ~o ~o ~o ~o ~o ~o ~o

<u>Παράδ. 2:</u> $y''' - 4y'' + y' + 6x = 0$.

Παίρνω το χαρακτηρ. πολ/μο:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$$

και έχω το εξής Β.σ.λ. $= \{e^{-x}, e^{2x}, e^{3x}, x \in \mathbb{R}\}$

<u>Παράδ. 3:</u> $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$

Χαρ. πολ. : $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 =$ (Horner) ....

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$$

και οι λύσεις είναι: $\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2}$, $\underbrace{\lambda_{1,2} = 1 \pm i}_{\sigma = 1,\ \tau = 1}$, $\lambda = 1$

άρα το Β.σ.λ είναι:

$\{e^{\lambda x}, e^x \cos x, e^x \sin x\}$. Άρα η λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$y(x) = e^x(c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \sin x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 2, σελ 113: Να λυθεί το $y''-2y'+y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.

↳

Ένα χαρακτ. πολ/μο είναι το $\lambda^2-2\lambda+1=0 \Rightarrow (\lambda-1)^2=0$
$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1$

άρα το Θ.Σ.Λ είναι $\{e^x, xe^x\}$

Άρα $y(x)=c_1e^x+c_2xe^x$, $x\in\mathbb{R}$ και πρέπει να προσδιορίσω τα c_1, c_2.

Έχω $y(0)=0 \Rightarrow c_1=0$

$y'(x)=(c_2xe^x)'=c_2e^x+c_2xe^x \Rightarrow y'(0)=1 \Rightarrow c_2=1$

Άρα η λύση είναι: $\underline{y(x)=xe^x}$

(iii) Να λυθεί το $y''+4y=0$, $y(\frac{\pi}{4})=1$, $y'(\frac{\pi}{4})=0$.

↳ Το χ. πολ/μο είναι το: $\lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm 2i$.

άρα $\sigma=0$ και $\tau=2$. Οπότε ένα βασικό σύνολο λύσεων θα είναι το: $\{\cos 2x, \sin 2x\}$. Οπότε:

$y(x)=c_1\cos(2x)+c_2\cdot\sin(2x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Τώρα έχω ότι $y(\frac{\pi}{4})=1 \Rightarrow c_1\cos(\frac{\pi}{4})=c_2\sin(\frac{\pi}{2})=1$
$\Rightarrow \boxed{c_2=1}$

και $y'(x)=-2c_1\sin(2x)+2c_2\cos(2x)$

και αφού $y'(\frac{\pi}{4})=0 \Rightarrow -2c_1\sin(2\cdot\frac{\pi}{4})+2c_2\cos(2\cdot\frac{\pi}{4})=0$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{c_1=0}$

άρα η λύση είναι: $\underline{y(x)=\sin(2x)}$

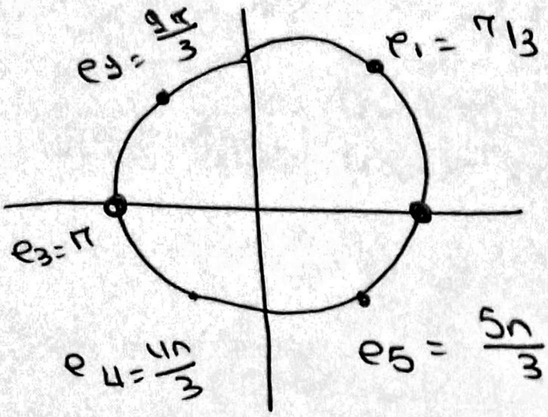
Ασκ. Β-22:

Αν $y^{(5)}+y^{(4)}+\dots+y''+y'+y=0$

Να βρεθεί το Β.σ.λ και το σύνολο των πραγματικών λύσεων που $\to 0$ για $x\to\infty$ είναι διαν. χώρος επί του $\mathbb{R}$.

Λύση

Παίρνω το χαρ. πολυώνυμο: $p(\lambda)=\lambda^5+\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1=0$



$$(\lambda-1)p(\lambda)=\lambda^6-1$$

$$\lambda^6=1=\cos 0+i\sin 0$$

$$\lambda_k=\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}$$

$, k=0,1,2,3,4,5.6$

Για $k=0 \rightsquigarrow \lambda_0=1$

$k=1 \rightsquigarrow \lambda_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Έτσι $y_1=e^{1/2x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$y_2=e^{1/2x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$y_3=e^{-1/2x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$y_4=e^{-1/2x}\sin\frac{-\sqrt{3}}{2}x$

$y_5=-1$

Έτσι το Β.σ.λ είναι το: $\{e^{-x}, e^{1/2x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, e^{1/2x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x, e^{-1/2x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}y, e^{-1/2x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x, x\in\mathbb{R}\}$

Οπότε η λύση είναι:

$y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{1/2x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3e^{1/2x}\sin\frac{\sqrt{3}}{x}+c_4e^{-1/2x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$
$+c_5e^{-1/2x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x, x\in\mathbb{R}$ //

Για να ισχύει ότι $y(x) \to 0$ πρέπει οπωσδήποτε
$c_2 = c_3 = 0$ Για να το δείξω αυτό θα πάω με
εις άτοπο απαγωγή.

Θέτω $\frac{\sqrt{3}}{2} x = 2\nu\pi$

Έτσι το σύνολο λύσεων A είναι το

$$A = \left\{ y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-1/2 x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 e^{-1/2 x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \right\}$$

Ο χώρος αυτός είναι εξ' ορισμού γραμμικός.
Παρατηρώ ότι μια βάση του χώρου αυτού είναι

η $B = \left\{ e^{x}, e^{-1/2} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, e^{-1/2 x} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \right\}$

(πρέπει όμως να το αποδείξω και αυτό)